Correction du Brevet Blanc de Mathématiques

Activités Numériques

Exercice n°1 :

$$A = 3\sqrt{28} + 4\sqrt{63} - 5\sqrt{112}$$
$$= 3\sqrt{4\times7} + 4\sqrt{9\times7} - 5\sqrt{16\times7}$$
$$= 3\times\sqrt{4}\times\sqrt{7} + 4\times\sqrt{9}\times\sqrt{7} - 5\times\sqrt{16}\times\sqrt{7}$$
$$= 3\times2\times\sqrt{7} + 4\times3\times\sqrt{7} - 5\times4\times\sqrt{7}$$
$$= 6\sqrt{7} + 12\sqrt{7} - 20\sqrt{7} = -2\sqrt{7}$$

$$B = \frac{7}{15} - \frac{4}{15} \div \frac{8}{5}$$
$$= \frac{7}{15} - \frac{4}{15} \times \frac{5}{8}$$
$$= \frac{7}{15} - \frac{4\times5}{15\times8}$$
$$= \frac{7}{15} - \frac{\cancel{4}\times\cancel{5}}{\cancel{5}\times3\times2\times\cancel{4}}$$
$$= \frac{7}{15} - \frac{1}{6}$$
$$= \frac{14}{30} - \frac{5}{30}$$
$$= \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

$$C = \frac{51\times\left(10^{-5}\right)^2\times7\times10^4}{12\times10^{-3}}$$
$$= \frac{51\times10^{-10}\times7\times10^4}{12\times10^3}$$
$$= \frac{51\times7}{12}\times\frac{10^{-10}\times10^4}{10^{-3}}$$
$$= \frac{\cancel{3}\times17\times7}{\cancel{3}\times4}\times10^{-10+4+3}$$
$$= \frac{119}{4}\times10^{-3}$$
$$= 29{,}75\times10^{-3}$$
$$= 0{,}02975$$
$$= 2{,}975\times10^{-2}$$

1. $A = -2\sqrt{7}$.

2. $B = \frac{3}{10}$.

3.a L'écriture décimale de C est 0,02975.

3.b L'écriture scientifique de C est $2{,}975\times10^{-2}$.

Exercice n°2 :

1. $D = 2(4x-7)(1+6x) - (4x-7)^2$
$$= 2\left(4x + 24x^2 - 7 - 42x\right) - \left(16x^2 - 56x + 49\right)$$
$$= 8x + 48x^2 - 14 - 84x - 16x^2 + 56x - 49$$
$$= 32x^2 - 20x - 63$$

2. $D = 2(4x-7)(1+6x) - (4x-7)^2$
$$= (4x-7)\left[2(1+6x) - (4x-7)\right]$$
$$= (4x-7)(2+12x-4x+7)$$
$$= (4x-7)(8x+9)$$

3. Pour $x=-1$, $D = 32(-1)^2 - 20(-1) - 63 = 32 + 20 - 63 = -11$.

Pour $x = \frac{1}{2}$, $D = 32\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 20\times\frac{1}{2} - 63 = 32\times\frac{1}{4} - \frac{20}{2} - 63 = \frac{32}{4} - \frac{20}{2} - 63 = 8 - 10 - 63 = -65$.

4. $(4x-7)(8x+9) = 0 \Leftrightarrow 4x-7=0$ ou $8x+9=0 \Leftrightarrow 4x=7$ ou $8x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{7}{4}$ ou $x=-\frac{9}{8}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{9}{8}\ ;\ \frac{7}{4}\right\}$.

Exercice n°3 :

1. Pour déterminer le PGCD de 252 et 180, utilisons l'algorithme d'Euclide :

Dividende	Diviseur	Reste
252	180	72
180	72	36
72	36	0

Donc le PGCD de 252 et 180 est le dernier reste non nul des divisions successives de l'algorithme soit 36.

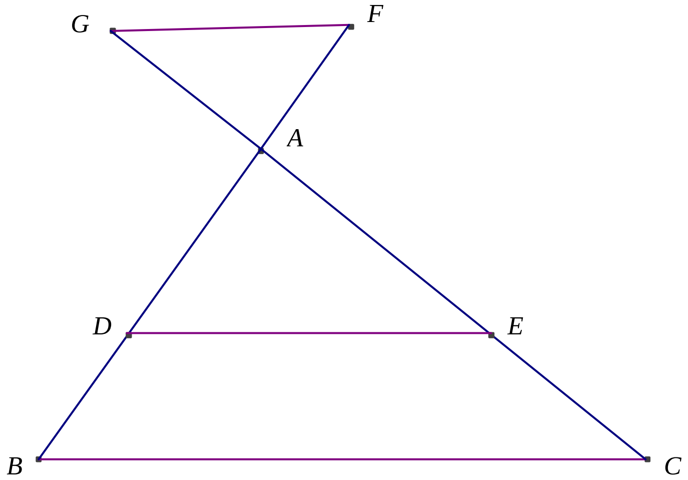
2.a Soit n le nombre maximal de colis qu'il pourra réaliser.

n divise le nombre de pralines et de chocolats car tous les colis sont identiques et, tous les chocolats et toutes les pralines sont utilisés. Ainsi, n est le Plus Grand Commun Diviseur de 252 et 180. Il pourra donc réaliser 36 colis identiques au maximum en utilisant tous les chocolats et toutes les pralines.

2.b. $252 \div 36 = 7$ et $180 \div 36 = 5$. Chaque colis sera donc composé de 7 pralines et 5 chocolats.

Activités Géométriques

Exercice n°1 :



1. Les points *A*, *E*, *C* sont alignés ainsi que les points *A*, *D*, *B*.

De plus, les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \Leftrightarrow \frac{3}{5} = \frac{4,8}{BC} \Leftrightarrow 3 \times BC = 5 \times 4,8 \Leftrightarrow BC = \frac{24}{3} = 8.$$

2. On commence par construire le triangle ABC connaissant les longueurs de ses trois côtés, puis on place les points *D*, *E*, *F*, *G*. Voir figure ci-contre.

3. Les points *A*, *G*, *C* sont alignés dans le même ordre que les points *A*, *F*, *B*. De plus : $\frac{AG}{AC} = \frac{2,5}{6,5} = \frac{5}{13} \simeq 0,38$ et $\frac{AF}{AB} = \frac{2}{5} = 0,4$.

Puisque $\frac{AG}{AC} \neq \frac{AF}{AB}$, on en déduit que les droites (GF) et (BC) ne sont pas parallèles d'après la contraposée du théorème de Thalès.

4. Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, le triangle ABC est rectangle en A.

$BC^2 = 8^2 = 64$ et $AB^2 + AC^2 = 5^2 + 6,5^2 = 25 + 42,25 = 67,25$.

Puisque $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, on en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle en A d'après la contraposée du théorème de Pythagore. Les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.

Exercice n°2 :

1.a Dans le triangle ABC rectangle en B, j'applique le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC^2 = AC^2 - AB^2 \Leftrightarrow BC^2 = 346,4^2 - 300^2 = 119992,96 - 90000 = 29992,96 \Leftrightarrow BC = \sqrt{29992,96} \simeq 173,2.$$

Le dénivelé BC mesure 173,2 m environ.

1.b Dans le triangle ABC rectangle en B, j'utilise la trigonométrie :

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{300}{346,4}. \text{ Par conséquent, } \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{300}{346,4}\right) \simeq 30°.$$

2.a Dans le triangle CDE rectangle en C, j'utilise la trigonométrie :

$$\sin \widehat{DEC} = \frac{DC}{DE} \Leftrightarrow \sin 15° = \frac{23}{DE} \Leftrightarrow DE \times \sin 15° = 23 \Leftrightarrow DE = \frac{23}{\sin 15°} \simeq 88,9.$$

La piste 2 mesure environ 88,9 m de longueur.

2.b La longueur totale du parcours est donnée par : $\ell = AE + DE$.

<u>Calcul de *AE* :</u>

Puisque $E \in [AC]$, $AE = AC - CE$.

Dans le triangle CDE rectangle en C, j'utilise la trigonométrie :

$$\tan \widehat{DEC} = \frac{DC}{CE} \Leftrightarrow \tan 15° = \frac{23}{CE} \Leftrightarrow CE \times \tan 15° = 23 \Leftrightarrow CE = \frac{23}{\tan 15°} \simeq 85,8.$$

Ainsi : $\ell = AC - CE + DE \simeq 349,4$.

La longueur du parcours pour les plus casse-cou est d'environ 349,4 m.

Problème

$1^{ère}$ Partie

1. Le point T est un point du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[RM]$, donc le triangle RMT est rectangle en T.

2. Dans le triangle RMT rectangle en T, j'utilise le théorème de Pythagore :

$RM^2 = RT^2 + TM^2 \Leftrightarrow TM^2 = RM^2 - RT^2 \Leftrightarrow TM^2 = 10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64 \Leftrightarrow TM = \sqrt{64} = 8$.

3.a Comme $S \in [RT]$ donc $ST = RT - RS = 6 - x$.

On a : $RS \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ et $ST \geq 0 \Leftrightarrow 6 - x \geq 0 \Leftrightarrow 6 \geq x$.

On en déduit que : $0 \leq x \leq 6$.

3.b Les points *R*, *S*, *T* sont alignés ainsi que les points *R*, *H*, *M*. De plus, les droites (SH) et (TM) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{RS}{RT} = \dfrac{RH}{RM} = \dfrac{SH}{TM} \Leftrightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{RH}{10} = \dfrac{SH}{8}$.

D'où : $\dfrac{RH}{10} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow 6RH = 10x \Leftrightarrow RH = \dfrac{10x}{6} = \dfrac{5}{3}x$ et $\dfrac{SH}{8} = \dfrac{x}{6} \Leftrightarrow 6SH = 8x \Leftrightarrow SH = \dfrac{8x}{6} = \dfrac{4}{3}x$.

2^{nde} Partie

Puisque dans cette partie, $x = 2{,}16$. On a : $RS = 2{,}16$; $ST = 6 - 2{,}16 = 3{,}84$; $RH = \dfrac{5}{3} \times 2{,}16 = 3{,}6$ et $SH = \dfrac{4}{3} \times 2{,}16 = 2{,}88$.

1. Comme le triangle RMT est rectangle en T, on a : $(RT) \perp (TM)$. Or $(SH) // (TM)$ donc $(RT) \perp (SH)$.

Puisque $S \in [RT]$, on a : $(ST) \perp (SH)$ et le triangle TSH est rectangle en S.

Dans le triangle TSH rectangle en S, on utilise le théorème de Pythagore :

$TH^2 = TS^2 + SH^2 \Leftrightarrow TH^2 = 3{,}84^2 + 2{,}88^2 = 14{,}7456 + 8{,}2944 = 23{,}04 \Leftrightarrow TH = \sqrt{23{,}04} = 4{,}8$.

2. Si le triangle TRH est rectangle, il est nécessairement rectangle en H car $[RT]$ est le plus grand côté.

On a : $RT^2 = 6^2 = 36$ et $RH^2 + TH^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 12{,}96 + 23{,}04 = 36$.

Puisque $RT^2 = RH^2 + TH^2$, on en déduit que le triangle TRH est rectangle en H d'après la réciproque du théorème de Pythagore.

3. Par conséquent, $(RH) \perp (TH)$ et comme $H \in [RM]$, on en déduit que H est le pied de la hauteur issue de T relativement au triangle RTM.

$3^{ème}$ Partie

1. Dans le triangle RMT rectangle en T, $\text{Aire}(RMT) = \dfrac{RT \times TM}{2} = \dfrac{6 \times 8}{2} = \dfrac{48}{2} = 24$.

L'aire du triangle RMT est de 24 cm^2.

2. Puisque $(SH) // (TM)$, le quadrilatère $STMH$ est un trapèze. De plus, $\widehat{TSH} = 90°$ donc $STMH$ est un trapèze rectangle.

$$A(x) = \frac{(SH + TM) \times ST}{2} = \frac{\left(\frac{4}{3}x + 8\right)(6 - x)}{2}.$$

3. $\left(\dfrac{4}{3}x + 8\right)(6 - x) = 24 \Leftrightarrow \dfrac{4}{3}x \times 6 - \dfrac{4}{3}x^2 + 48 - 8x = 24 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}x^2 \cancel{+8x} \cancel{-8x} + 48 = 24 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{3}x^2 = -48 + 24 \Leftrightarrow x^2 = -24 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right)$.

$\Leftrightarrow x^2 = 18 \Leftrightarrow x = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{18} = -3\sqrt{2}$. $\mathcal{S} = \left\{-3\sqrt{2}\ ;\ 3\sqrt{2}\right\}$.

4. On veut résoudre $A(x)=\dfrac{24}{2}$.

$$A(x)=\frac{24}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{4}{3}x+8\right)(6-x)}{2}=\frac{24}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}x+8\right)(6-x)=24\,.$$

On retrouve l'équation de la question précédente. Or $0 \leq x \leq 6$, donc $x=3\sqrt{2}$.

L'aire du trapèze $STMH$ est égale à la moitié de l'aire du triangle RMT pour $x=3\sqrt{2}$.

5. Dans cette question, $x=3\sqrt{2}$.

Donc $RS=3\sqrt{2}$; $ST=6-3\sqrt{2}$; $RH=\dfrac{5}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ et $SH=\dfrac{4}{\cancel{3}}\times\cancel{3}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$.

O est le milieu de $[RM]$ donc $RO=\dfrac{RM}{2}=\dfrac{10}{2}=5$. Les points *R*, *O*, *H* sont donc alignés dans cet ordre car $RO<RH$.

Les points *R*, *O*, *H* sont alignés dans le même ordre que les points *R*, *S*, *T*.

De plus : $\dfrac{RS}{RT}=\dfrac{3\sqrt{2}}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\dfrac{RO}{RH}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Puisque $\dfrac{RS}{RT}=\dfrac{RO}{RH}$, on en déduit que les droites (TH) et (OS) sont parallèles d'après la réciproque du théorème de Thalès.